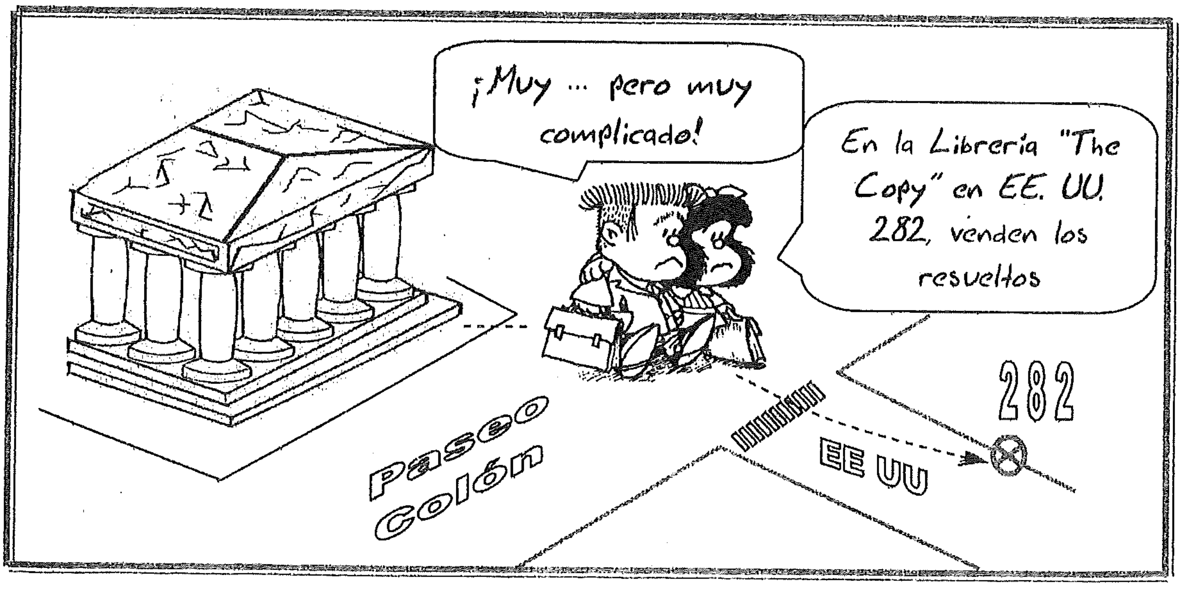
Física I

Cuerpo rígido (1ra Parte)

Ejercicio 1 al 13

- Cinemática y dinámica – Momento de inercia -

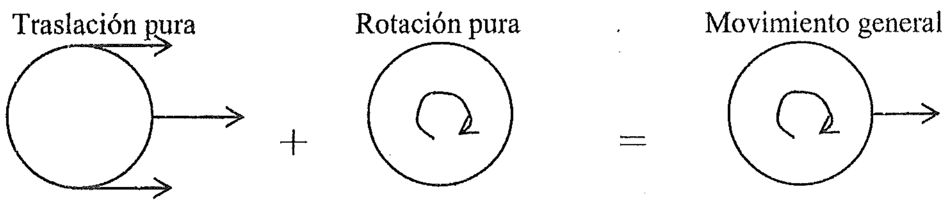
- Energía mecánica – Cuerpos vinculados -



Índice

Cinemática del cuerpo rígido

Un cuerpo tal que sus partes guarden siempre la misma posición relativa, es decir la distancia entre dos puntos cualesquiera r_i y r_j es constante, sin importar las fuerzas que se le apliquen, se le da el nombre de cuerpo rígido (*CR*). Se puede demostrar que el movimiento más general que puede tener un *CR* es la superposición de una traslación más una rotación alrededor de un eje. Por ejemplo, un cilindro sobre un plano puede trasladarse uniformemente (dibujo ①) donde todos los puntos avanzan con la misma velocidad v, más una rotación pura (dibujo ②) donde los puntos rotan alrededor de un eje.

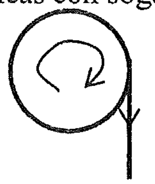


Por este motivo, la velocidad de cualquier punto ***P*** de un cuerpo rígido siempre se puede determinar como la suma de la velocidad con que se traslada un punto ***O*** cualquiera más la de rotación de ***P*** alrededor de ese punto ***O***. En fórmulas: $\overline{v}_P = \overline{v}_O + \overline{\Omega}\times\overline{r}_{P,O}$

CIR (centro instantáneo de rotación): es aquel punto cuya velocidad es 0.

Condición de rodadura: en la mayoría de los problemas de la guía, el movimiento de traslación del cuerpo está relacionado con el de rotación. Es decir, la velocidad angular ω de giro se relaciona con la velocidad lineal v de traslación. Los dos casos más comunes que se plantean en la guía son:

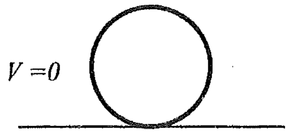
Poleas con sogas



La condición es que la velocidad lineal de la rotación de la polea para los puntos del borde externo sea igual a la velocidad de traslación de la soga. Es decir:

$$v_{Tang} = v_{soga} \quad \rightarrow \quad \omega.R = v_{soga}$$

Rodar sin deslizar



Cuando un cuerpo se mueve sobre una superficie y lo hace sin deslizar, es necesario que el punto de contacto tenga la misma velocidad que el piso (así su movimiento relativo al piso es 0). Esto convierte al punto de contacto en el CIR. Para que se cumpla esta condición es necesario que: $v_{cm} = \omega.R$, donde v_{cm} es la velocidad del centro de masa.

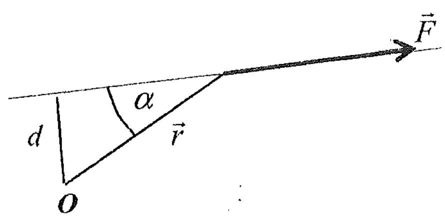
Derivando estas dos relaciones respecto al tiempo nos llevan a una condición (también llamada de rodadura): $a = \gamma.R$. En el primer caso a es la aceleración de la soga, en el 2do es la aceleración del centro de masa. Y γ es la aceleración angular (la derivada de la velocidad angular ω).

Dinámica del cuerpo rígido

i) Para la traslación: $\sum \vec{F} = M.\vec{a}_{cm}$ donde a_{cm} es la aceleración del Centro de Masa

ii) Para la rotación: $\sum \vec{M} = I.\vec{\gamma}$ donde M es el momento de cada fuerza respecto al centro de momentos $\boldsymbol{O}$ elegido: $M = |F|.r.sen(\alpha)$ ó $M = |F|.d$

En el primer caso, r es la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza y el centro de momentos $\boldsymbol{O}$, mientras que α es el ángulo entre estos dos vectores.



En el segundo caso d es el brazo de palanca, o sea la distancia entre la recta que incluye a la fuerza (punteada) y el centro $\boldsymbol{O}$

I es el momento de inercia del cuerpo respecto del punto $\boldsymbol{O}$. Como ampliamos en la página 9, es un equivlente de la masa para las rotaciones: muestra la inercia al cambio de estado de rotación que tiene un cuerpo, y para un determinado eje. Es decir, muestra lo dificultoso que resulta detener un giro (si ya se encuentra girando) o iniciarlo (cuando no lo hace), respecto de cierto eje. Esa es una diferencia importante respecto a la masa, el momento de inercia depende del eje respecto del cual se quiera cambiar el estado de giro

Observación: la ecuación de rotación se puede tomar para cualquier punto que sea inercial (el CIR) o en el Centro de Masa, ***aun cuando este punto esté acelerado.***

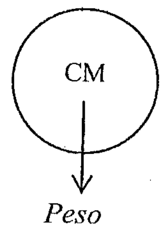
1) A un volante cilíndrico de radio 1 m, se lo hace girar con el eje horizontal a una altura de 11 m y $w = 5\ s^{-1}$. Luego se lo deja caer en caída libre. Calcular

a) La velocidad del CM justo antes de tocar el piso

b) La velocidad del punto que hará contacto con el piso justo antes de tomar contacto

c) posición del CIR, justo antes de tomar contacto con el piso.

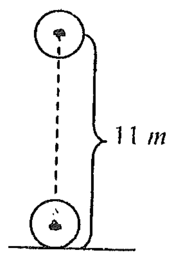
Empiezo planteando la dinámica de la caída del cilindro. Como en un problema de física del CBC, primero decimos que en la caída el cilindro tiene aplicada sólo la fuerza Peso. Esta fuerza está aplicada en el Centro de gravedad, y no hace momento respecto de este punto ($d = 0$). Así, de la ecuación de rotación respecto del CM es:



$$\underbrace{\sum M}_{=0} = I_{cm} \cdot \gamma \rightarrow \gamma = 0 \rightarrow w = 5 s^{-1} = cte$$

De la ecuación de traslación $\underbrace{\sum F}_{Peso} = M . a_{cm} \rightarrow a_{cm} = g$

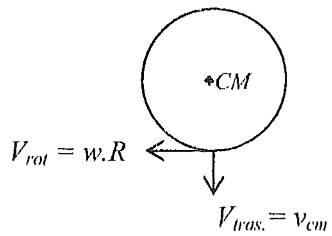
Observar que el CM se comporta como una partícula, que tiene la masa M total del cilindro, y que cae desde el reposo (recordar que el cilindro giraba alrededor del eje del CM, pero este punto no se movía), desde una altura inicial de 11 m hasta una final de 1 m. Esta altura final es el radio del cilindro, el CM (punto negro en el centro) no toca el piso.



De la fórmula del MRUV:

$$(v_f)^2-\overbrace{(v_i)^2}^{0}=2.\overbrace{a}^{9,8}.\overbrace{(x-x_i)}^{10m} \xrightarrow{\text{despejo}} v_f=\sqrt{196}=-14\tfrac{m}{s}\,\hat{j}$$

Esta es la respuesta a la pregunta (a). Para la (b) tengamos en cuenta que la velocidad de cualquier otro punto es la superposición de la velocidad del CM más la debida a la rotación alrededor de éste. Así:



$$\bar{v}_B=\bar{v}_{CM}+w\wedge R=-14\tfrac{m}{s}\,\hat{j}-5\tfrac{m}{s}\,\hat{i}$$

Vemos que el movimiento del cilindro consiste en la caída libre de un punto (el CM) más el giro que hace todo el cuerpo rígido alrededor de ese punto. Es lo que los físicos llaman la "superposición de una traslación más una rotación" (o movimiento "roto traslatorio")

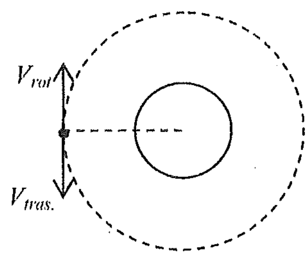
c) Planteo vectorialmente la condición del CIR:

$$\overbrace{\bar{v}_{CIR}}^{0}=\bar{v}_{CM}+w\wedge R \rightarrow 0=-14\tfrac{m}{s}\,\hat{j}+\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & -5\frac{1}{s}\\ x & y & 0\end{vmatrix}$$

Y despejo la ubicación (x,y) del CIR, medido desde el CM:

$$14\tfrac{m}{s}\,\hat{j}=\left(5\tfrac{1}{s}.y\ ;\ -5\tfrac{1}{s}.x\ ;\ 0\right)\xrightarrow{\text{despejo}}\begin{cases}\hat{i}:\ 0=5\frac{1}{s}.y \rightarrow y=0\\ \hat{j}:14\,\frac{m}{s}=-5\frac{1}{s}.x \rightarrow x=-2{,}8m\end{cases}$$

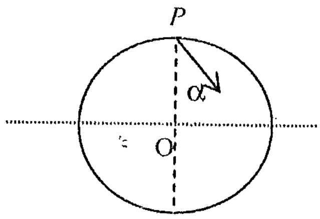
Es fácil comprobar que este punto (a 2,8 m a la izquierda del CM), tiene velocidad de rotación opuesta a la de caída del CM. Y como su módulo es $w.R$ = 5 . 2,8 = 14 m/s hacia arriba, se tiene velocidad total nula. Es importante notar que el CIR **no** es un punto del cilindro que cae.



2. En un instante dado un cilindro (R = 30 cm) se está moviendo. En la figura se muestra una sección del mismo. Las velocidades de dos puntos del cuerpo son V_{cm} = $-10\frac{m}{s}\,\hat{j}$ y $|V_p|=20\frac{m}{s}$; α = 60°. a) verificar el tipo de movimiento que posee el cilindro y su condición de rigidez. b) Hallar analíticamente la posición del CIR.

a) Para verificar que el cuerpo cumple las condiciones de rigidez, podemos usar dos caminos:

① ver que la distancia entre ambos puntos se conserva. Para eso es necesario ver que la velocidad de ambos sobre el eje que los une es la misma: de esta manera no se acercan ni se alejan, conservan su distancia relativa.



Para eso observemos que la recta que los une es el eje y. Por lo tanto deben tener la misma velocidad sobre ese eje:

$$v_O = -10\frac{m}{s}.\hat{j} \quad ; \quad v_P = 20\frac{m}{s}.sen(60)\hat{i} \overbrace{-20\frac{m}{s}.\cos(60)\hat{j}}^{-10\frac{m}{s}}$$

Como vemos, la componente $\hat{j}$ es igual, se satisface la condición de rigidez.

② ver que el movimiento del cuerpo se puede poner como una rotación más una traslación: en ese caso se debe cumplir que: $\overline{v}_P = \overline{v}_o + \overline{\Omega}\times\overline{r}_{P,O}$. Para plantear esta condición, debo observar que la posición del punto P = (0, R, 0), mientras que la velocidad angular siempre resulta perpendicular al eje del movimiento: $\overline{\Omega} = (0,0,\Omega)$

Planteo la igualdad:

$$\overline{v}_P = \overline{v}_O + \overline{\Omega}\times\overline{r}_{P,O} = -10\frac{m}{s}\hat{j} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{opero} \overline{v}_P = -10\frac{m}{s}\hat{j} - \Omega.R.\hat{j}$$

Uso la velocidad de P en componentes:

$$17{,}32\frac{m}{s}.\hat{i} \cancel{-10\frac{m}{s}\hat{j}} = \cancel{-10\frac{m}{s}\hat{j}} - \Omega.\overbrace{R}^{0{,}3m}.\hat{i} \xrightarrow{despejo} \Omega = -\frac{17{,}32\frac{m}{s}}{0{,}3m} = -57{,}71\frac{1}{s}$$

Como el sistema resultó compatible, se verifica la condición de rigidez (observar que se hizo compatible porque las componentes en $\hat{j}$ son iguales, es lo mismo que paso en ①). El signo de la velocidad angular indica que apunta en contra del versor $\hat{k}$.

b) Para hallar la posición del CIR, planteamos un punto desconocido de este plano, su posición será (x , y , 0). Y uso la condición de velocidad nula:

$$\overbrace{\overline{v}_{CIR}}^{0} = \overline{v}_O + \overline{\Omega} \times \overline{r}_{CIR} = -10 \tfrac{m}{s} \hat{j} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -57{,}7 \tfrac{1}{s} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \rightarrow 0 = -10\ \hat{j} + 57{,}7.y.\hat{i} - 57{,}7.x.\hat{j}$$

Esta es una igualdad vectorial, entonces igualo las dos componentes de la derecha a 0:

$$\hat{j}: \quad -10 - 57{,}7.x = 0 \quad \rightarrow \quad x = -0{,}173\,m \qquad\qquad \hat{i}: \quad 57{,}7.y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$$

Por lo tanto, la ubicación del CIR es r_{cir} = (-0,173 m ; 0 ; 0) ✓

3. Una escalera de L = 1 m, homogénea, está apoyada en el piso y en la pared. Conociendo α = 30° y la velocidad del punto A, $\mathbf{v_A} = -2\ \tfrac{m}{s}\ \mathbf{j}$, hallar para esta posición la velocidad del CM, la del punto B y la posición del CIR.

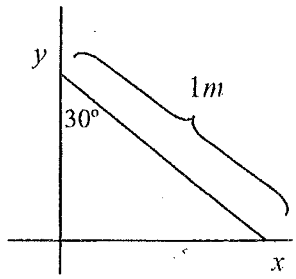
Este problema es similar al anterior. Primero observemos que

① la velocidad del punto A se escribe vectorialmente como: $\overline{v}_A = (0; -2\ ; 0)$.

② la velocidad del punto B no la conocemos, pero sabemos por las características del problema que ese punto debe tener velocidad horizontal, porque está apoyado en el piso:

$$\overline{v}_B = (v;\ 0\ ;\ 0).$$

③ la velocidad angular es un vector perpendicular al plano xy de movimiento (por lo tanto está en el eje z) $\overline{\Omega} = (0{,}0{,}\Omega)$.



④ la posición de los puntos B y A se obtiene por trigonometría:

$$x = 1m.sen(30°) = 0{,}5\,m \quad ; \quad y = 1\,m.\cos(30) \cong 0{,}87\,m$$

Entonces, las posiciones de A y B son r_A = (0 ; 0,87m ; 0) y r_B = (0,5 m ; 0 ; 0)

Finalmente, la posición de B relativa a A es: $\overline{r}_{B,A} = \overline{r}_B - \overline{r}_A = (0{,}5m\ ;\ -0{,}87m\ ;\ 0)$

Planteo la condición de rigidez:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\Omega} \times \overline{r}_{B,A} = -2 \tfrac{m}{s} \hat{j} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0{,}5m & -0{,}87m & 0 \end{vmatrix}$$

Operamos y reemplazamos v_B

$$v_B.\hat{i} = -2\ \tfrac{m}{s}\ \hat{j} + 0{,}87m.\Omega.\hat{i} + 0{,}5m.\ \Omega.\hat{j} \xrightarrow{\ igualo\ } \begin{cases} \hat{j})\quad 0 = -2 + 0{,}5.\Omega \\ \hat{i})\quad v_B = 0{,}87.\Omega \end{cases}$$

De la 1[ra] ecuación despejo $\Omega = 4\frac{1}{s}$, y reemplazando en la 2[da]: $v_B = 3{,}46\frac{m}{s}$.

Para terminar el ejercicio, vamos a sacar la posición del CIR: planteo la condición de velocidad nula, y que la ubicación del CIR respecto de A es $(x\ ,y\ ,0)$:

$$\overbrace{\overline{v}_{CIR}}^{0} = \overline{v}_A + \overline{\Omega}\times\overline{r}_{CIR,A} = -2\ \tfrac{m}{s}\ \hat{j} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 4\frac{1}{s} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \rightarrow 0 = -2\ \hat{j} - 4.y.\hat{i} + 4.x.\hat{j}$$

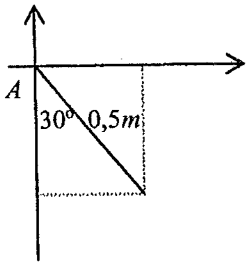
Igualo componente a componente: $\begin{cases} \hat{i})\quad 4.y = 0 \\ \hat{j})\ -2 + 4.x = 0 \end{cases}$

De la 1[ra] saco $y = 0$; y de la 2[da] $x = 0{,}5\ m$. Pero para completar la respuesta, recordemos que esta es la posición relativa al punto A, es decir: $\overline{r}_{CIR,A} = (0{,}5m\ ;\ 0\ ;\ 0)$. Para medir desde el origen de posiciones despejamos:

$$\overline{r}_{CIR,A} = \overline{r}_{CIR} - \overline{r}_A \ \rightarrow\ \overline{r}_{CIR} = \overline{r}_{CIR,A} + \overline{r}_A = (0{,}5\ ;\ 0\ ;\ 0) + (0{,}87\ ;\ 0\ ;\ 0) = 0{,}5m.\hat{i} + 0{,}87m.\hat{j}$$

① el CIR **no** es un punto de la escalera; ningún punto de la escalera está quieto en ese instante. Sin embargo, el CIR existe y tiene sentido físico (es como el centro de masa de un anillo, que se encuentra en el centro geométrico del mismo, es decir en un punto donde el anillo no tiene masa)

② muchos alumnos quieren plantear esta parte midiendo las posiciones desde el origen (o lo que es lo mismo, se olvidan que la posición que encontraron es **relativa** a A). Esto es imposible con lo que tenemos hasta aquí, porque ***no conocemos la velocidad del origen***: aunque este punto no pertenezca a la escalera, en el campo de velocidades que se plantea, cada punto del espacio tiene asignada una velocidad (real o ficticia). No podemos decir que el origen está quieto.



Por último, me falta encontrar la velocidad el CM de la escalera. Para eso ubico su posición respecto a A. Como el centro de masa está justo en la mitad de la escalera, tenemos por trigonometría:

$$x_{cm,A} = 0{,}5.sen(30) = 0{,}25\,m \;\; ; \;\; y_{cm,A} = -0{,}5.\cos(30) = -0{,}433m$$

Y planteo la relación de velocidades:

$$\bar{v}_{CM} = \bar{v}_A + \bar{\Omega} \times \bar{r}_{CM,A} = -2\,\tfrac{m}{s}\,\hat{j} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 4\tfrac{1}{s} \\ 0{,}25m & -0{,}433m & 0 \end{vmatrix} = 1{,}73\tfrac{m}{s}.\hat{i} - 1\tfrac{m}{s}.\hat{j} \quad \checkmark$$

4.(a) ¿Cuál es el significado físico del momento de inercia de un cuerpo? (b) El momento de inercia de un cuerpo puede cambiar, o tener más de un momento de inercia?

El Momento de Inercia

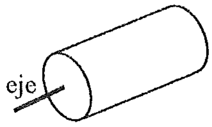
El momento de inercia respecto de un eje se define como la integral de volumen extendida a todos los puntos del cuerpo:

$$I = \iiint_{Vol} \delta . r^2 dV$$

Donde δ es la densidad (que puede ser una propiedad que depende de cada punto del cuerpo, o si éste es homogéneo, ser una constante), y r es la distancia a la que se encuentra el punto respecto del eje. El significado físico del momento de inercia es el siguiente: representa la resistencia a cambiar el ***estado de rotación*** que tiene un cuerpo. Por ejemplo, si un cuerpo tiene un momento de inercia muy grande comparado con otro, costará mucho frenar su giro, o ponerlo a girar si es que está quieto. Esta magnitud en cierta forma es el equivalente de la masa para la traslación (la masa mide la resistencia al cambio de movimiento de traslación de un cuerpo). Pero, en el caso de la masa, es una magnitud propia y característica del cuerpo, mientras que para el momento de inercia, también depende del eje en que se lo hace rotar. Veamos algunos casos muy usados:

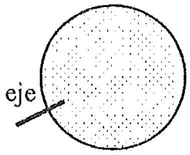
i) para una partícula el momento de inercia es I = m. d^2 donde d es la distancia de la partícula al eje de giro

ii) para un cilindro sólido homogéneo o un disco plano, respecto de su eje central:



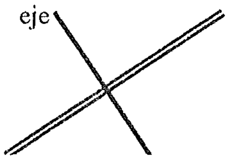
$$I = \tfrac{1}{2}.M.R^2$$

iii) para una esfera sólida homogénea, respecto de su eje diametral:



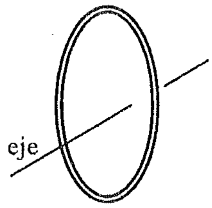
$$I = \tfrac{2}{5}.M.R^2$$

iv) para una varilla delgada en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a la varilla:



$$I = \frac{M.L^2}{12}$$

v) para un aro o anillo en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al mismo:



$$I = M.R^2$$

<u>Teorema de Steiner:</u> Este teorema permite obtener el momento de inercia I_2 de una figura respecto a cualquier otro eje <u>paralelo</u> a uno de momento de inercia I_1 ya conocido. Si la distancia entre ambos ejes paralelos es d, el teorema dice:

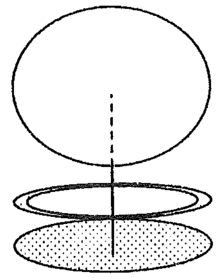
$$I_2 = I_1 + M.d^2$$

5.(a) ¿Qué es, y cómo está relacionado el eje de giro, con el momento de inercia de un cuerpo? (b) si se toma un disco, una esfera, y un anillo, que tienen la misma masa y el mismo radio, y consideramos la rotación de los tres cuerpos alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y del anillo, y que pase por el centro de cada uno de los tres cuerpos, ¿podremos decir que los tres tienen el mismo momento de inercia respecto a ese eje? (c) Una esfera maciza se hace bajar rodando sin resbalar, sucesivamente por dos planos distintos, que tienen la misma altura pero distinta inclinación respecto de la horizontal, ¿llegará a la base de los planos con la misma velocidad? (d) ¿tardará igual tiempo en ambos casos?

a) El momento de inercia se define como vimos mediante la integral de volumen sobre el cuerpo rígido:

$$I = \iiint_{Vol} \delta . r^2 dV$$ (r es la distancia de cada punto del cuerpo al eje de giro)

b) estos tres cuerpos van a tener distinto momento de inercia, ya que cuanto mayor cantidad de masa tengan lejos del eje de giro, tendrán más inercia, es decir más costará sacarlos del reposo para que empiecen a girar. Así, el anillo, para el cual todos los pedacitos (átomos) están a una distancia R del eje, es el de mayor momento de inercia. Le sigue el disco, y por último la esfera (el más fácil de hacer girar, porque tiene menos momento de inercia).



Este resultado se verifica con las expresiones del cuadro anterior. En efecto, respecto del eje central, los momentos de Inercia que figuran en el cuadro son:

$$\overbrace{\frac{2}{5}.M.R^2}^{I_{esf}} < \overbrace{\frac{1}{2}.M.R^2}^{I_{disco}} < \overbrace{M.R^2}^{I_{anillo}}$$

Para poder comparar todas las figuras tienen igual masa y radio, de lo contrario la cosa cambia. Pero si todas están formadas por igual número de partículas, entonces el anillo es el cuerpo que en total las tiene más lejos del eje de rotación.

Planteo de Energía para el CR

Básicamente los problemas de energía se plantean como en el caso de una partícula. Por un lado tenemos las formas de energía mecánica conocidas (cinética, potencial y elástica). Por el otro los trabajos de las fuerzas no conservativas. Pero, para el cuerpo rígido hay que tener en cuenta dos formas de energía cinética, cada una asociada a uno de los tipos de movimiento que puede realizar:

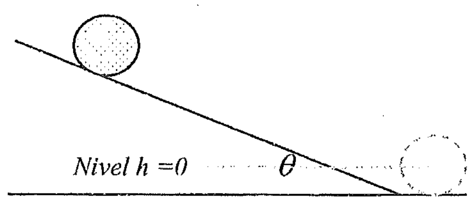
i) para la traslación: $E_{cin} = \frac{1}{2} M.(v_{cm})^2$ donde la velocidad es la del Centro de Masa

ii) para la rotación: $E_{cin} = \frac{1}{2}\ I_{cm}.\omega^2$

iii) para la energía potencial, la altura es la del centro de masa: $E_p = M.g.h_{cm}$

c) Este problema lo podemos resolver por un planteo de energía. Consideremos el descenso de la esfera por el plano inclinado.

Parte del reposo, por lo tanto su energía inicial es potencial. Vamos a tomar como nivel 0 para medir la altura, al nivel que queda una distancia R por encima del piso, para que en la situación final no haya energía gravitatoria. De esta manera al llegar a la base del plano tiene energía cinética (de rotación y traslación), pero no gravitatoria.



Hay dos cosas fundamentales que el alumno debe entender al plantear el problema

① en este problema actúa una fuerza de rozamiento, y gracias a esa fuerza la esfera puede aumentar ω cuando se acelera y aumenta v. Cuando lo planteamos por Dinámica te muestro dónde aparece la necesidad de esta fuerza. Pero recordá que sin ella, es imposible de que el cuerpo ruede sin deslizar.

② esta fuerza de rozamiento no saca ni entrega energía: en efecto, mientras se mantenga la condición de rodadura, el punto de contacto con el piso tiene velocidad igual a 0, y es el CIR del movimiento. Esto nos dice que la fuerza de rozamiento aplicada es ***estática***. Y además, como no existe desplazamiento en el punto en que se aplica, no hace trabajo.

¿Cuándo el rozamiento no hace trabajo?

Ese último punto es fundamental. Insisto, es análogo a lo que discutimos muchas veces con el tema del rozamiento al caminar: el punto de contacto tiene velocidad cero (por eso al caminar dejamos una huella). Entonces la fuerza de rozamiento es estática y además como en ese punto no hay desplazamiento, no hace trabajo. Todo esto es cierto mientras se mantenga la condición de que el cuerpo no desliza en el descenso (o sea mientras se cumpla la condición de rodadura)

En virtud del resultado ② podemos decir que la energía de la esfera debe permanecer constante en el descenso. Por lo tanto, podemos igualar:

$$E_{mec,f} = E_{mec,i} \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2}.M.(v_{cm})^2 + \tfrac{1}{2}.I_{cm}.(\omega)^2 = M.g.H_{i,cm}$$

Observar que el planteo es similar al que se hace en el caso de una partícula, pero debemos recordar que ahora se agrega la energía cinética de rotación. Planteando la condición de rodadura: $v_{cm} = \omega.R$, nos queda:

$$\frac{1}{2}.M.v_{cm}^{\;2} + \frac{1}{2}.I.\frac{v_{cm}^{\;2}}{R^2} = M.g.H_{i,cm} \xrightarrow{opero} \frac{1}{2}.\left(M + \frac{I}{R^2}\right).v_{cm}^{\;2} = M.g.H_{i,cm}$$

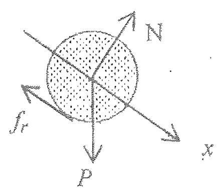
De aquí despejo la velocidad del CM al llegar a la base del plano:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2.M.g.H_{i,cm}}{M + \frac{I}{R^2}}} \xrightarrow{I_{esf} = \frac{2}{5}.M.R^2} v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}.g.H_{i,cm}} \quad (\clubsuit)$$

En el caso de una partícula ($I = 0$) nos hubiera dado $v = \sqrt{2.g.h}$, que es una expresión mayor que esta. Esto se debe a que parte de la energía potencial el cuerpo rígido la usa para rodar, y parte para trasladarse. Así, siempre un cuerpo rígido (no sólo una esfera) llegaría con una velocidad v de traslación menor que la de la partícula (que sólo se traslada). Y en esta cuenta no influye el ángulo del plano, por lo tanto la velocidad de la esfera sería la misma.

d) para hallar el "tiempo", conviene plantear por dinámica el descenso por el plano. ¿Por qué? Sencillo: el "tiempo" se relaciona con la aceleración (cinemática, dinámica, todo eso). Por energía no se llega a lo que se pregunta. O por lo menos no es tan fácil.

Empecemos por el diagrama de cuerpo libre: en su descenso la esfera tiene aplicadas las fuerzas Peso, Normal, y rozamiento, las dos primeras en el CM, y la última en donde hace contacto.



Las ecuaciones de la 2da ley de Newton son asociadas son:

$$\sum_{eje\ x} F = P_x - f_r = M.a_{cm} \qquad \sum_{eje\ y} F = N - P_y = 0$$

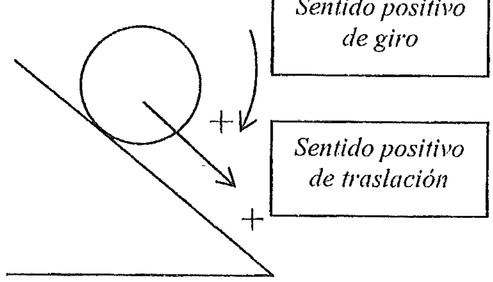
Estas ecuaciones dinámicas son idénticas a las que planteamos para una partícula. Y esto es siempre así, porque la traslación de un Cuerpo Rígido no es más que la traslación de su centro de masa.

Pero, para completar el tema dinámico, falta dar la ecuación de momentos. Y para eso tenemos que elegir un sistema de referencia para los giros (decidir si tomo positivo el sentido horario o antihorario). Yo siempre aconsejo que se elija un sistema "solidario", como lo que hacíamos en el CBC.

El sistema solidario de ejes

Observemos que cuando el cuerpo esté cayendo (sentido positivo del eje x), también estará girando en forma horaria. Conviene entonces tomar positivo el sentido horario para que sea solidario con la elección que hicimos del eje x para el descenso. Esto **no** es imprescindible, pero cuando usemos la condición de rodadura: $a_{cm} = \gamma . R$, si no tomara un sistema solidario puede haber una diferencia de los signos entre a_{cm} y γ. Es como en el CBC, si no te cuidaste de usar un sistema solidario, puede ser que las aceleraciones de los dos cuerpos tengan distinto signo, y nos equivoquemos por llamarlas a las dos "a".
La condición de rodadura es una condición vectorial, con un producto vectorial disimulado. Cuando la escribimos sencillamente como $a_{cm} = \gamma . R$, estamos dando una relación en "módulos". Para no equivocar signos, lo más sencillo es tomar siempre un sistema solidario de ejes, pensado que "si el CM acelera para tal lado (ese será el sentido del eje x) el cuerpo rígido girará para tal otro (ese será el sentido de giro para los momentos)".

Es fácil, en los ejemplos uno aprende rápidamente a hacerlo. Aquí para la esfera, cuando cae paralela al plano (eje x del dibujo) va girando en el sentido horario (sentido positivo para la rotación)



Dicho esto, escribo la ecuación de momentos para la esfera que cae por el plano respecto del CM de la esfera:

$$\sum M = \overbrace{M_{peso}}^{0} + \overbrace{M_{Normal}}^{0} + M_{roz} = I_{cm}.\gamma$$

Los dos primeros momentos se anulan porque son fuerzas aplicadas en el CM, por lo tanto su distancia d para calcular el momento es 0. Para el rozamiento, la distancia es R (el radio de la esfera). Y provoca un giro en sentido horario (+):

$$M_{roz} = I_{cm}.\gamma \quad \rightarrow \quad +f_{roz}.R.sen(90) = I_{cm}.\gamma$$

__Observación importante__: de no existir rozamiento, no existiría ninguna fuerza que hiciera momentos. En consecuencia no habría aceleración angular, y el cuerpo rígido jamás empezaría a girar. Caería entonces con movimiento de traslación, pero no de rotación. Esto justifica lo que afirmamos en la página 12: para que se cumpla la condición de rodadura es necesario que exista una fuerza de rozamiento, que permita que cuando aumenta la velocidad en la caída, la esfera gire más rápido. Reemplazo la condición de rodadura:

$$a_{cm} = \gamma.R \quad \rightarrow \quad f_{roz}.R = I_{cm}.\left(\frac{a_{cm}}{R}\right) \rightarrow f_{roz} = \frac{I_{cm}}{R^2}.a_{cm}$$

Y en la ecuación del eje x:

$$P_x - \frac{I_{CM}}{R^2}.a_{cm} = M.a_{cm} \rightarrow P_x = \left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right).a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{M.g.sen(\theta)}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)} \quad (\heartsuit)$$

$$\xrightarrow{I_{esf} = \frac{2}{5}.M.R^2} \quad a_{cm} = \frac{5}{7}.g.sen(\theta)$$

Entonces, si el Centro de Masa tiene que descender una altura $H_{i,cm}$, la distancia que debe recorrer sobre el plano es por trigonometría: $\Delta x = \frac{H_i}{sen(\theta)}$.

Para terminar, la cinemática del punto CM es la de un MRUV (tiene aceleración constante $\frac{5}{7}.g.sen(\theta)$ como calculamos antes). De la ecuación complementaria:

$$(v_f)^2 - \underbrace{(v_o)^2}_{0} = 2.a.\Delta x \rightarrow (v_f)^2 = 2.\tfrac{5}{7}.g.sen(\theta).\frac{H}{sen(\theta)} \xrightarrow{despejo} v_f = \sqrt{\tfrac{10}{7}.g.H_{i,cm}}$$

Que es la misma velocidad encontrada por energía.

En cuanto al tiempo, usamos:

$$x = \overbrace{x_o}^{0} + \overbrace{v_o.t}^{0} + \frac{1}{2}.a.t^2 \rightarrow \frac{H}{sen(\theta)} = \frac{1}{2}.a.t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2.H}{a.sen\theta}}$$

$$\xrightarrow{a=\frac{5}{7}.g.sen(\theta)} t = \sqrt{\frac{14.H}{5.g.sen^2(\theta)}}$$

Como vemos, el tiempo empleado para descender si depende del ángulo θ del plano. A mayor ángulo, mayor es el seno, menos da el tiempo (lógico: más pendiente tiene el plano, en menos tiempo cae la esfera).

El descenso de un CR en un plano inclinado

Para terminar, quiero hacer notar que en una caída de un cuerpo rígido por un plano inclinado, sujeto a la condición de rodadura, de la expresión (♣) en la página 13 vemos que a mayor momento de inercia, menor velocidad tiene el centro de masa cuando termina el descenso, ya que el momento de inercia aparece en el divisor de la fracción. Por el mismo motivo, en la expresión (♥) de la página anterior vemos que a mayor momento de inercia menor es la aceleración con la que el cuerpo rígido desciende por el plano. Y en el despeje que hicimos del tiempo, a menor aceleración más demora en bajar. Así, en un descenso entre un aro y una esfera de la misma masa y el mismo radio, en condición de rodadura, el de mayor momento de inercia (el aro) llega con menor velocidad, baja con menor aceleración y demora más tiempo.

Consejo: antes de seguir con la guía, hay que volver a resolver este problema, resaltar todo los conceptos que discutimos, y consultar con tu docente las dudas que puedan surgir. Es importante manejar estos resultados.

6. Una esfera hueca de plomo y otra maciza de madera, tienen igual radio y masa. La de plomo gira respecto de un eje baricéntrico. ¿Qué distancia habrá que desplazar el eje baricéntrico de la esfera de madera para que el momento de inercia con respecto a este nuevo eje, sea el mismo que el que tiene la esfera hueca de plomo con respecto a un eje baricéntrico?

El momento de inercia para una esfera y una esfera hueca:

$$I = \frac{2.M.R^2}{5} \text{ (esfera maciza)} \qquad I = \frac{2.M.R^2}{3} \text{ (esfera hueca)}$$

Como vemos, para la misma masa y radio, es menor el momento de inercia de la esfera maciza. Esto tiene que ver con que la hueca tiene su masa más alejada del eje de giro que la maciza (en ésta, hay trozos de masa sobre el diámetro, y otros muy cercanos al mismo; en la hueca, todos están más o menos lejos). Cuando queremos que la maciza rote alrededor de otro eje, su momento de inercia cambia, según el Teorema de Steiner. Como deseamos hacer que la esfera maciza rote alrededor de un eje paralelo al central, y separado por una distancia "***a***" desconocida, entonces:

$$I_{//} = \frac{2.M.R^2}{5} + M.a^2$$

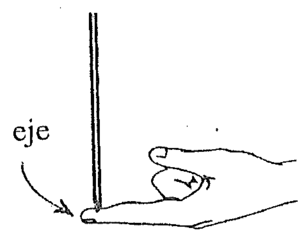
Y como queremos que este momento de inercia tenga el mismo valor que para la esfera hueca de la misma masa y radio R, igualo:

$$\frac{2.M.R^2}{5} + M.a^2 = \frac{2.M.R^2}{3} \xrightarrow{\text{despejo}} a = \sqrt{\frac{2}{3}.R^2 - \frac{2}{5}.R^2} = \sqrt{\frac{4}{15}.R^2} \approx 0{,}516.R$$

Esta es la distancia respecto del eje diametral que nos piden.

7. ¿Por qué es más fácil sostener verticalmente en equilibrio un escobillón con la punta de un dedo que hacer lo mismo con un lápiz?

El escobillón tiene un momento de inercia I mucho mayor que el lápiz para rotar alrededor del eje (en nuestro caso el dedo), ya que tiene mayor cantidad de masa más alejada del eje que pasa por el extremo. Entonces, a mayor momento de inercia, resulta más difícil que se ponga a girar respecto de ese eje. O sea, resulta más fácil mantenerlo sin que gire.

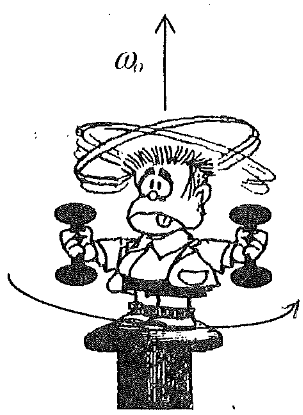


8. ¿Por qué los equilibristas usan varas para ayudarse en el equilibrio al caminar sobre una cuerda?

La misma explicación que en el problema anterior: el equilibrista aumenta considerablemente su momento de inercia I gracias a la vara (la vara pone más masa, más lejos del eje de rotación que sería el del hilo sobre el que se para el equilibrista). Al aumentar el momento de inercia, es más difícil que el conjunto se ponga a girar, por lo tanto resulta más fácil mantener el equilibrio.

9. (a) Un muchacho sentado sobre un taburete de piano está girando con velocidad constante; sostiene en las manos, con los brazos extendidos, dos masas iguales. Sin mover los brazos, suelta las dos masas. ¿Ocurre algún cambio en la velocidad angular? (b) ¿Se conserva el momento cinético? (c) Repentinamente encoge los brazos: ¿varía su velocidad angular? Explicar. (d) ¿Varía su energía cinética? Explicar

(a) El sistema está formado por tres partes: el taburete (una silla giratoria sin fricción), una persona sobre ella, y un par de masas. Inicialmente, todas estas partes del sistema se encuentran girando juntas con la misma velocidad angular ω_0. Y asociado a este giro, el sistema tiene un impulso angular o momento cinético, perpendicular al plano del giro:



$$\vec{L}_o = I_{sist}.\omega_o.\breve{z}$$

¿Qué ocurre cuando la persona "suelta" las masas? Primero analicemos las fuerzas exteriores al sistema: tenemos el Peso (sobre cada integrante), y la Normal que ejerce el piso sobre el taburete. Todas ellas están dirigidas en dirección vertical. Y por lo tanto ninguna de ellas ejerce un momento en esa dirección (recordemos que el momento de una fuerza es por definición un vector perpendicular a la fuerza)

Es decir, los integrantes del sistema reciben fuerzas internas (por ejemplo, la que ejerce el taburete sobre el chico) y las externas **no** ejercen momento sobre el eje z. Por lo tanto hay una magnitud que se conserva, el momento angular sobre el eje z para el sistema.

Pero esto suele llevar al siguiente error: se piensa que al dejar caer las masas disminuye el momento de Inercia, y por lo tanto debe aumentar la velocidad angular.

Sí, claro que está mal. Veamos: como el sistema no recibe momentos debe conservarse el impulso angular (momento cinético) respecto del eje z. Y si bien es cierto que el impulso angular del sistema se conserva, cuando se sueltan las masas, éstas se movían con la misma velocidad angular que la silla y la persona, por lo tanto, se llevan su momento cinético L. Y para la persona no cambia nada. Veamos que nos dicen las ecuaciones:

i) si desprecio la masa del taburete (o de no ser posible despreciarla la incluyo en la de la persona, porque taburete y persona están unidos) el impulso inicial en el eje z vale:

$$L_o = I_{persona}.\omega_o + I_{pesas}.\omega_o$$

Para las pesas, su momento angular también se puede escribir como $L = \vec{r} \times \vec{p} = r.m.v_o$ (es fácil ver que como las pesas son puntuales, su momento de inercia es $I_{pesas} = m.r^2$, y su velocidad se relaciona con la angular $v = \omega.r$, por lo que las dos formas de expresar el momento angular son iguales)

ii) impulso un instante después de soltar las masas: como a éstas se las deja libres, su velocidad "nueva" es, por inercia, la que tenían por la rotación, en consecuencia un ***instante después*** de ser liberadas su momento angular sigue valiendo $L = \vec{r} \times \vec{p} = r.m.v_o$

En total, si pensaba que había un cambio en ω de la persona, las ecuaciones dicen que:

$$L_{total}^{inicial} = L_{total}^{Final} \quad \rightarrow \quad I_{persona}.\omega_o + 2.r.m.v_o = I_{persona}.\omega_f + 2.r.m.v_o \quad \rightarrow \quad \omega_o = \omega_f$$

La persona sigue girando con la misma velocidad angular.

(b) En el momento en que se sueltan las masas el momento cinético se conserva. Ya sea para el sistema (como planteamos en a), como para la persona (para la cual antes de soltar las masas tenía el mismo momento de inercia y la misma velocidad angular que después de

soltarlas). Pero ahora tenemos una nueva situación, cuando la persona lleva sus manos contra el pecho, su momento de inercia respecto al eje de giro disminuye (recordar que el momento de inercia disminuye cuanto mayor sea la masa próxima al eje de giro)
Es decir, en esta situación: $I_1 < I_o$. Por la conservación del impulso angular del sistema (ahora que soltó las pesas, el sistema es la "persona+Taburete")

$$L_{total}^{inicial} = L_{total}^{Final} \quad \rightarrow \quad I_o.\omega_o = I_f.\omega_f \quad \rightarrow \quad \omega_f = \frac{I_0}{I_f}.\omega_o \quad (\blacklozenge)$$

El factor $\frac{I_o}{I_f}$ es mayor que 1 (el numerador es mayor que el divisor, por lo que dijimos antes), entonces de esta relación $\omega_f > \omega_o$ (girará más rápido)

c) La energía del sistema "persona+taburete" es la energía cinética asociada a la rotación. La podemos calcular como

$$E_{rot} = \frac{1}{2}.I.\omega^2$$

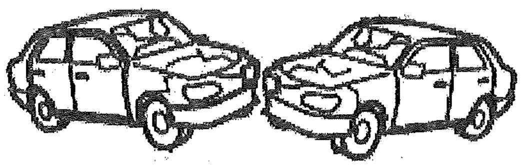
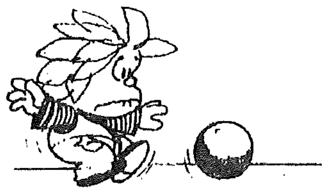
Pero visto así tenemos que al encoger los brazos, ocurren dos cosas a la vez: aumenta la velocidad angular según vimos en (b), y también disminuye el momento de Inercia. Así las cosas no resulta muy claro qué debemos contestar. Pero te propongo que escribamos la energía cinética de rotación final y la relacionemos con la inicial mediante la expresión ($\blacklozenge$)

$$E_{rot,f} = \frac{1}{2}.I_f.\omega_f^2 \xrightarrow{(\blacklozenge)} E_{rot,f} = \frac{1}{2}.I_f.\frac{I_o^2}{I_f^2}.\omega_o^2 = \frac{1}{2}.\frac{I_o}{I_f}.I_o.\omega_o^2 = \underbrace{\frac{I_o}{I_f}}_{>1}.\underbrace{\frac{1}{2}.I_o.\omega_o^2}_{E_{rot,o}}$$

Nos queda así que $E_{rot,f} > E_{rot,o}$, es decir que la energía aumenta cuando el chico encoge los brazos. Esto es posible, por más que no haya fuerzas externas (o que se compensen). Un sistema puede cambiar su energía si hay fuerzas internas que hagan trabajo, basta que el cuerpo modifique su forma, como en este caso. Para que se conserve la energía se necesita que no haya trabajos de fuerzas "no conservativas", sean o no internas.
Esto es muy importante: cuando analizamos un problema donde debo plantear "algún" teorema de conservación, debemos saber porque se conservan algunas magnitudes, y no otras. En casos de giros, lo habitual es revisar qué momentos se aplican. La cantidad de movimiento se conserva, porque el centro de masa del chico no se desplaza. Pero eso no sirve para hacer ninguna predicción. En cambio la energía del sistema cambia al mover los brazos desplazando

las masas. Eso no resulta claro para muchas personas, por lo que quiero dejar para reflexionar algunas de estas situaciones, ya vistas en el CBC, que demuestran que un sistema aislado, conserva su cantidad de movimiento, su momento cinético, pero **no** siempre su energía, porque las fuerzas internas que se aplican las partes modifican la misma.

Las fuerzas internas pueden cambiar la energía mecánica

Choque	Retropropulsión
	
En un choque frontal, un sistema aislado pierde casi toda su energía mecánica debido a las fuerzas internas de interacción entre los vehículos.	Un chico parado sobre hielo, patea una pelota y sale hacia atrás, por conservación de la cantidad de movimiento. Así, un sistema sin energía mecánica inicial, la aumenta por la acción de fuerzas internas

10. Un volante es una gran masa rotante que permite acumular energía cinética de rotación, para luego transferirla a algún sistema, por ejemplo, para arrancar un motor. El volante de un motor debe ceder 400 j de energía cinética cuando su frecuencia se reduce de 660 rpm a 540 rpm. a) ¿Qué momento de inercia se requiere?
b) Si el volante es un cilindro hueco de masa 1 kg y radio interior 0,5 m, ¿cuál debe ser su radio exterior?

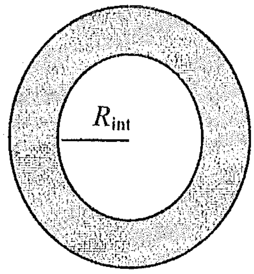
Como vimos en la página 11, la energía cinética de rotación de un cuerpo se puede calcular como $E = \frac{1}{2}.I.\omega^2$. Por lo tanto, al disminuir su velocidad de giro, disminuye también su energía cinética de rotación. Calculemos para las dos frecuencias dadas la velocidad angular asociada con la expresión:

$$\omega_f = 2.\pi.f = 6{,}28.\frac{660\,rev}{60\,s} \cong 69{,}12\ \frac{1}{s} \qquad \text{y} \qquad \omega_o = 2.\pi.f = 6{,}28.\frac{540\,rev}{60\,s} \cong 56{,}55\ \frac{1}{s}$$

Restamos las energías final e inicial e igualamos con la pérdida de 400 j que nos dan de dato:

$$\frac{1}{2}.I.\omega_f^{\,2} - \frac{1}{2}.I.\omega_o^{\,2} = -400\,j \quad \xrightarrow{despejo} \quad I = \frac{-400\,j}{\frac{1}{2}.\left(\omega_f^{\,2} - \omega_o^{\,2}\right)} \cong 0{,}506\,kg.m^2 \quad ✓$$

b) el momento de inercia de un cilindro hueco como el que se muestra en la figura vale:



$$I = \tfrac{1}{2}.M.(R_{ext}{}^2 + R_{int}{}^2)$$

Basta entonces reemplazar los datos y despejar:

$$0{,}506\ kg.m^2 = \tfrac{1}{2}.1\ kg.(R_{ext}{}^2 + (0{,}5\,m)^2) \ \rightarrow\ R_{ext} = \sqrt{2.0{,}506 - 0{,}25} \approx 0{,}87\ m$$

11. Un clavadista salta del trampolín con los brazos hacia arriba y las piernas estiradas, de forma que su momento de inercia alrededor de su eje de rotación es de 20 $kg.m^2$. Luego se encoge reduciendo su momento de inercia a 3,6 $kg.m^2$ y da 2 revoluciones completas en 1,2 s. Si no se hubiera encogido, ¿cuántas revoluciones habría dado en los 1,5 s desde el trampolín al agua?

El problema del clavadista es una típica situación de conservación del momento cinético (momento angular). En efecto, la única fuerza aplicada mientras se desplaza por el aire es el peso. Y como esta fuerza está aplicada en el Centro de Masa, entonces respecto de este punto no hay momentos externos de ninguna fuerza. Por lo tanto:

$$\sum M = 0 = \frac{dL}{dt} \ \rightarrow\ L = cte$$

De esta forma, el momento cinético $L = I.\omega$ no puede cambiar. Esto nos indica que cuando se encoge para reducir su momento de inercia I, debe al mismo tiempo aumentar su velocidad angular ω de giro, para que L siga siendo constante.

Otras magnitudes

Observar que esa única fuerza impide que se conserve la cantidad de movimiento. Y si hablo de la energía, debo ir con cuidado: si bien la única fuerza externa es conservativa (el Peso), ya vimos que las fuerzas internas pueden cambiar la energía de un sistema, cuando el cuerpo modifica su forma. Esto es lo que ocurre en el problema del clavadista, en su caída al abrir y cerrar los brazos puede cambiar la velocidad de giro (y su momento de inercia), con lo que se modifica su energía. Sólo cuando el clavadista es una "partícula (al estilo CBC)" su energía mecánica es constante, porque en ese caso no hay ni giro sobre su

CM, ni cambio de momento de Inercia. Pero eso no es cierto para el caso de un cuerpo no puntual que puede cambiar su forma.

Cuando se encuentra encogido conocemos que completa dos giros en 1,2s. Con este dato podemos hallar la velocidad angular de rotación:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2.2\pi}{1,2s} \cong 10,47\tfrac{1}{s}$$

Y ahora planteamos la conservación del momento cinético:

$$L_f = L_i \quad \rightarrow \quad I_f.\,\omega_f = I_o.\omega_o \quad \xrightarrow{datos} \quad 20\ kg.m^2.\omega_f = 3,6\ kg.m^2.10,47\tfrac{1}{s}$$

De aquí podemos despejar la velocidad angular ω_f (que en realidad es la velocidad angular de rotación que corresponde al momento de inercia estirado): $\omega_f = 1,885\frac{1}{s}$.

Ya casi podemos contestar la pregunta. Si nunca hubiera cambiado su momento de inercia, hubiera tenido toda la caída esta velocidad angular. Por lo tanto, durante ese intervalo de tiempo de 1,5*s* (desde el trampolín hasta el agua), el ángulo que hubiera girado sería:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \xrightarrow{despejo} \quad \Delta\theta = 1,885\tfrac{1}{s}.1,5s \cong 2,83\ rad$$

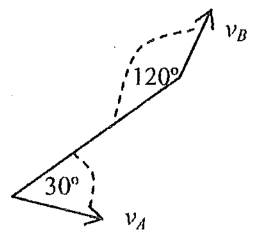
Y para saber qué cantidad de vueltas representa este ángulo, divido por el valor de una vuelta (en radianes es $2\pi \cong 6,28$):

$$\Delta\theta = \frac{2,83}{6,28} = 0,45\ vueltas$$

12. Una varilla homogénea de masa M y longitud L = 0,4 m está apoyada sobre una mesa horizontal sin rozamiento con velocidades v_A = 2 m/seg y v_B en cada uno de sus extremos como indica la figura.

a) Hallar la velocidad angular y del centro de masa de la varilla

b) Calcular la energía mecánica de la varilla ¿se conserva?

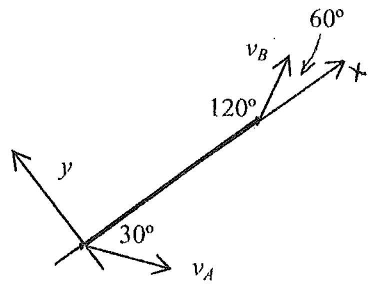


a) para plantear el problema, podemos usar un sistema de referencia con un eje x paralelo a la varilla, un eje y perpendicular, y uno z perpendicular a la mesa (saliente de la hoja)

En este sistema, las velocidades de los extremos se escriben:

$$v_A = (2 \,{}^{m}\!/_{s}.\cos(30) \;;\; -2 \,{}^{m}\!/_{s}.sen(30) \;;\; 0\,)$$

$$v_B = (v_B.\cos(60) \;;\; v_B.sen(60) \;;\; 0\,)$$



Entonces, de la relación rototraslatoria de los cuerpos rígidos, para cada punto se tiene:

$$v_A = v_{cm} + \omega \times r_A \;\longrightarrow\; (1{,}73 \,{}^{m}\!/_{seg} \;;\; -1 \,{}^{m}\!/_{seg} \;;\; 0) = (v_x ; v_y ;\; 0) + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\frac{L}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Observar que usamos para la velocidad angular de rotación alrededor del CM que su dirección es perpendicular al plano de la mesa (o sea perpendicular a las velocidades de los puntos de la varilla). Por otro lado, para ubicar al extremo A corresponde hacerlo referido al CM, por eso se usó media longitud de la varilla hacia la izquierda del eje x)

De la misma forma, para el extremo B:

$$v_B = v_{cm} + \omega \times r_B \;\longrightarrow\; (\tfrac{1}{2} v_B \;;\; \tfrac{\sqrt{3}}{2} v_B \;;\; 0) = (v_x ; v_y ;\; 0) + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \frac{L}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Operando en estas dos igualdades vectoriales, e igualando coordenadas, se llega a un sistema de 4 ecuaciones útiles (todas menos las del eje z que son nulas).

$$1{,}73 \,{}^{m}\!/_{seg} = v_x \quad ; \quad -1 \,{}^{m}\!/_{seg} = v_y - \omega.\tfrac{L}{2} \quad ; \quad \tfrac{1}{2}.v_B = v_x \quad ; \quad \tfrac{\sqrt{3}}{2}.v_B = v_y + \omega.\tfrac{L}{2}$$

De la 1[ra] se obtiene la coordenada v_x de la velocidad del CM de la varilla. Y en la 3[ra] obtenemos el módulo de la velocidad del extremo B: $v_B = 2.v_x = 3{,}46 \,{}^{m}\!/_{seg}$

Sumando la 2[da] y la 4[ta]:

$$-1 \,{}^{m}\!/_{seg} + \frac{\sqrt{3}}{2}.v_B = 2.v_y \;\xrightarrow{\;despejo\;}\; v_y = 1 \,{}^{m}\!/_{s}$$

Y la última incógnita (la velocidad de rotación ω alrededor del CM), queda expresada en función del largo L de la varilla:

$$-1\ {}^{m}\!/_{seg} = v_y - \omega.\tfrac{L}{2} \ \rightarrow \ \omega = \frac{4\ {}^{m}\!/_{s}}{L} = 10\ s^{-1}$$

En todos los casos, un signo "+" indica en el sentido del eje elegido. Por ejemplo, para ω significa que es "saliente a la hoja"

b) para calcular la energía del rígido, sólo debemos considerar las energías cinéticas ya que la varilla se encuentra horizontal. De lo visto en la página 11, tenemos que usar la suma de la traslatoria y la rotatoria respecto al CM, es decir:

$$E_{rot} + E_{trasl.} = \tfrac{1}{2}.I_{cm}.\omega^2 + \tfrac{1}{2}.M.(v_{cm})^2 = \tfrac{1}{2}.\frac{M.L^2}{12}.\left(\frac{4\ {}^{m}\!/_{s}}{L}\right)^2 + \tfrac{1}{2}.M.(v_x{}^2 + v_y{}^2)$$

Simplificando, llegamos a la expresión: $E_{mec} = \tfrac{2}{3}.M_{(kg)} + \tfrac{1}{2}.M_{(kg)}.(4) = \tfrac{8}{3}.M_{(kg)}$

Esta cantidad debe permanecer constante, porque no existen fuerzas de rozamiento. Y me resulta insospechado que la varilla rígida pueda hacer fuerzas internas (como el clavadista del problema anterior) que modifiquen su rotación y por lo tanto su energía.

13. Dos discos metálicos de radios R_1= 3,00 cm y R_2= 6,00 cm y masas M_1= 0,80 kg y M_2 = 1,60 kg, se sueldan juntos y se montan en un eje sin rozamiento que pasa por su centro común tal como se muestra en la figura.

a) ¿Qué momento de inercia total tienen los discos respecto del eje que pasa por sus centros tal como se muestra en la figura?

b) Un hilo se enrolla en el disco más pequeño y se cuelga de él un bloque de 1,5 kg. Si el bloque se suelta del reposo desde una altura de 2,00 m sobre el piso ¿qué velocidad tiene justo antes de llegar al piso?

c) Repetir el ítem (b) pero ahora con el hilo enrollado en el disco grande.

d) ¿En qué caso (ítem b o ítem c) alcanza mayor velocidad el bloque?

Los problemas de cuerpos vinculados

El siguiente es un viejo conocido del CBC: los problemas de cuerpos vinculados, es decir aquellos problemas donde tenemos dos cuerpos cuyos movimientos de alguna manera se encuentran relacionados. La idea es muy similar a la usada en el caso de cuerpos puntuales: se hacen sus diagramas, se vinculan sus movimientos relacionando aceleraciones, se escriben sus ecuaciones dinámicas y finalmente se despejan las incógnitas.

Empecemos por los discos: como el momento de inercia es una "propiedad aditiva", los momentos de inercia de dos cuerpos respecto al mismo eje de rotación, pueden sumarse. Entonces, para cada disco calculamos el momento de inercia respecto del eje central, con la expresión que dimos en la página 10 para los cilindros:

$$I_1 = \tfrac{1}{2}.M_1.(R_1)^2 = \tfrac{1}{2}.0{,}8\ kg.(3.10^{-2}\ m) = 3{,}6.10^{-4}\ kg.m^2$$

$$I_2 = \tfrac{1}{2}.M_2.(R_2)^2 = \tfrac{1}{2}.1{,}6\ kg.(6.10^{-2}\ m) = 2{,}88.10^{-3}\ kg.m^2$$

El momento de inercia del conjunto, como dijimos, es la suma, $I_T = 3{,}24.10^{-3}\ kg.m^2$ ✓

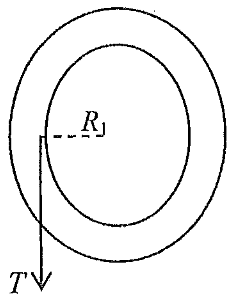
b) Hago el diagrama de las fuerzas aplicadas al peso que cuelga (la tensión y el peso), y escribo su ecuación de traslación:

$$P - T = M.a$$

Aquí no se aclara que la aceleración es referida al centro de masa porque el peso que cuelga se lo considera una partícula, sin posibilidades de rotar. Pero el que si rota es el sistema de cilindros que sirve de polea.

Este sistema tiene aplicada una única fuerza (la tensión) que provoca momentos (las otras fuerzas, como el peso, y los vínculos con el eje, están aplicadas sobre el mismo eje de rotación, y su momento vale 0).

Observar que la distancia entre la recta de acción de la tensión y el eje central (o sea el brazo de palanca) es igual al radio del cilindro menor. Por último, esta fuerza hace un momento antihorario, y con nuestro sistema de referencia "solidario", es un momento positivo.



$$\sum M = I_T \gamma \xrightarrow{reemplazo} +T.R_1 = 3{,}24.10^{-3}\ kg.m^2\ .\ \gamma$$

Nos falta expresar la condición de rodadura: $\gamma.R_1 = a$. Reemplazo en esta ecuación:

$$T.R_1 = 3{,}24.10^{-3}\,kg.m^2\ .\ \frac{a}{R_1} \xrightarrow{despejo} T = 3{,}24.10^{-3}\,kg.m^2\ .\ \frac{a}{(R_1)^2}$$

Y reemplazamos en la ecuación de traslación del cuerpo que cuelga:

$$P - 3{,}24.10^{-3}\,kg.m^2\,\frac{a}{(R_1)^2} = 1{,}5\,kg.a \quad\rightarrow\quad 14{,}7\,\mathrm{N} = 3{,}24.10^{-3}\,kg.m^2\,\frac{a}{(R_1)^2} + 1{,}5\,kg.a$$

Y despejo la aceleración del cuerpo que baja:

$$14{,}7\,\mathrm{N} = 3{,}24.10^{-3}\,kg.m^2\,\frac{a}{(0{,}03m)^2} + 1{,}5\,kg.a = 3{,}6.a + 1{,}5.a \;\rightarrow\; a = \frac{14{,}7}{5{,}1} \cong 2{,}88\,\tfrac{m}{s^2}$$

Lo que nos queda es plantear la cinemática del cuerpo *M*, con la ecuación de un MRUV, con esta aceleración, que sale del reposo y un desplazamiento de $\Delta x = 2m$

$$(v_f)^2 - \underbrace{(v_i)^2}_{0} = 2.a.\Delta x \xrightarrow{despejo} v_f = \sqrt{2.a.\Delta x} \cong 3{,}4\,\tfrac{m}{s}\ \checkmark$$

Claro que si: lo primero que observamos es que el sistema no tiene fuerzas externas aplicadas que hagan trabajo y sean no conservativas. En efecto:

- el peso de *M* es una fuerza conservativa
- la tensión es una fuerza interna entre partes del sistema. Sin embargo ya hicimos notar que las fuerzas internas pueden cambiar la energía de un cuerpo, cuando éste modifica su forma, como en el problema del clavadista. No es el caso de este problema.
- las otras fuerzas de vínculo aplicadas a la polea sobre su eje se supone que no hacen trabajo, porque están aplicadas en un punto donde no hay desplazamiento.
- se desprecia la fricción.

Entonces, el sistema debe tener energía mecánica constante.

① para la energía inicial, como todo estaba en reposo, sólo tenemos la gravitatoria de la masa *M* que se encuentra a 2 *m* del piso.

② para la energía final, debemos tener en cuenta que no sólo el cuerpo M tiene energía cinética, sino que también la polea se pone a rotar, entonces: $E_{c,polea} = \frac{1}{2}.I_T.\omega^2$

Igualando:

$$E_i = E_f \;\rightarrow\; M.g.H_i = \frac{1}{2}.I_T.\omega^2 + \frac{1}{2}.M.v^2$$

Usando la condición de rodadura $v = \omega.R_1$ para relacionar la velocidad de giro de la polea con la de traslación de M:

$$M.g.H_i = \frac{1}{2}.I_T.\left(\frac{v}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{2}.M.v^2 \xrightarrow{\text{opero}} 1{,}5.9{,}8.2 = \frac{1}{2}.3{,}24.10^{-3}.\frac{v^2}{9.10^{-4}} + 0{,}75.v^2$$

$$29{,}4 = 1{,}8.v^2 + 0{,}75.v^2 \xrightarrow{\text{despejo}} v = \sqrt{\frac{29{,}4}{2{,}55}} \cong 3{,}4\frac{m}{s} \quad \checkmark$$

Es el mismo resultado obtenido que usando cinemática y dinámica.

c) Es más fácil mirar qué cambio debemos hacer en la ecuación de conservación de la energía: tenemos casi todo igual, excepto que esta vez, al enrollar en el disco grande, la condición de rodadura se debe usar con el radio de este disco: $v = \omega.R_2$. Entonces

$$M.g.H_i = \frac{1}{2}.I_T.\left(\frac{v}{R_2}\right)^2 + \frac{1}{2}.M.v^2 \xrightarrow{\text{opero}} 1{,}5.9{,}8.2 = \frac{1}{2}.3{,}24.10^{-3}.\frac{v^2}{3{,}6.10^{-3}} + 0{,}75.v^2$$

$$29{,}4 = 0{,}45.v^2 + 0{,}75.v^2 \xrightarrow{\text{despejo}} v = \sqrt{\frac{29{,}4}{1{,}2}} \cong 4{,}95\frac{m}{s} \quad \checkmark$$

Como vemos, tenerla atada al cilindro externo permite que el sistema termine con mayor velocidad final que en el caso anterior. Esto se debe a que, cuanto más alejada del eje se aplique la tensión, mayor es su brazo de palanca, y por lo tanto también es mayor el momento aplicado a la polea. Por lo tanto gira más rápido y el cuerpo también cae más rápido.

Bueno, dejamos aquí, en el próximo completamos la guía.